KULIAH 23 : FUNGSI LOGARITMA

BAB 6
FUNGSI LOGARITMA DAN FUNGSI EKSPONEN

Objektif :

Pada akhir kuliah ini, pelajar akan

1. Dapat mengenal sifat asas fungsi logaritma , takrif dan bentuk grafnya
2. Mencari terbitan dan kamiran yang membabitkan fungsi logaritma

---

Bahagian 1 : Fungsi Logaritma

Pengenalan

Takrif : Suatu **fungsi logaritma L** ialah satu fungsi yang bukan pemalar dan boleh beza yang tertakrif di atas selang $(0, \infty)$, sedemikian hingga bagi sebarang $x , y \in (0, \infty)$

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

Sifat Fungsi Logaritma

1. $L(1) = L(1.1) = L(1) + L(1)$

$= 2L(1)$

$\therefore \quad L(1) \quad = \quad 0$

2. Bagi $x \in (0, \infty)$,

$$0 = L(1) = L(x \,.\, 1/x)$$
$$= L(x) + L(1/x)$$
$$\therefore L(x) = -L(1/x) \text{ atau}$$
$$L(1/x) = -L(x)$$

$\therefore$ Bagi $x, y \in (0, \infty)$,

$$L(x/y) = L(x) - L(y)$$

3. Fungsi logaritma adalah bolehbeza, daripada takrif terbitan kita tulis

$$L'(x) = \underset{h \to 0}{had} \frac{L(x+h) - L(x)}{h}$$

Daripada sifat fungsi logaritma *L(x)* - *L(y)* = *L(x/y)* , kita perolehi

$$L(x+h) - L(x) = L\left(\frac{x+h}{x}\right) = L\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$\therefore \quad L'(x) = \underset{h \to 0}{had} \frac{L(1 + h/x)}{h} = \underset{h \to 0}{had} \frac{L(1 + h/x) - L(1)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{had} \frac{1}{x} . \frac{L(1 + h/x) - L(1)}{h/x} = \frac{1}{x} \underset{h/x \to 0}{had} \frac{L(1 + h/x) - L(1)}{h/x}$$
$$= \frac{1}{x} L'(1) \quad \Rightarrow \quad Bagi\ sebarang\ \ fungsi\ \log aritma\ L,\ L'(x) = \frac{1}{x} L'(1)$$

Perhatikan bahawa $L'(1) \neq 0$ kerana L bukan fungsi pemalar.

<u>Fungsi logaritma asli</u>

Fungsi logaritma yang paling mudah ialah fungsi yang mempunyai nilai $L'(1) = 1$. Oleh yang demikian, daripada takrif terbitan kita telah perolehi

$$L'(x) = \frac{1}{x} L'(1) = \frac{1}{x}$$

Jadi, $L(x)$ ialah antiterbitan bagi $1/x$. Daripada takrif antiterbitan, kita dapati ungkapan $\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ juga merupakan antiterbitan bagi $1/x$, jadi

$$L'(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt + C$$

Oleh kerana $0 = L(1) \Rightarrow \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt + C = 0 + C = C \Rightarrow L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.
Kita namakan fungsi $L(x)$ di atas sebagai fungsi **Logaritma Asli dalam *x***

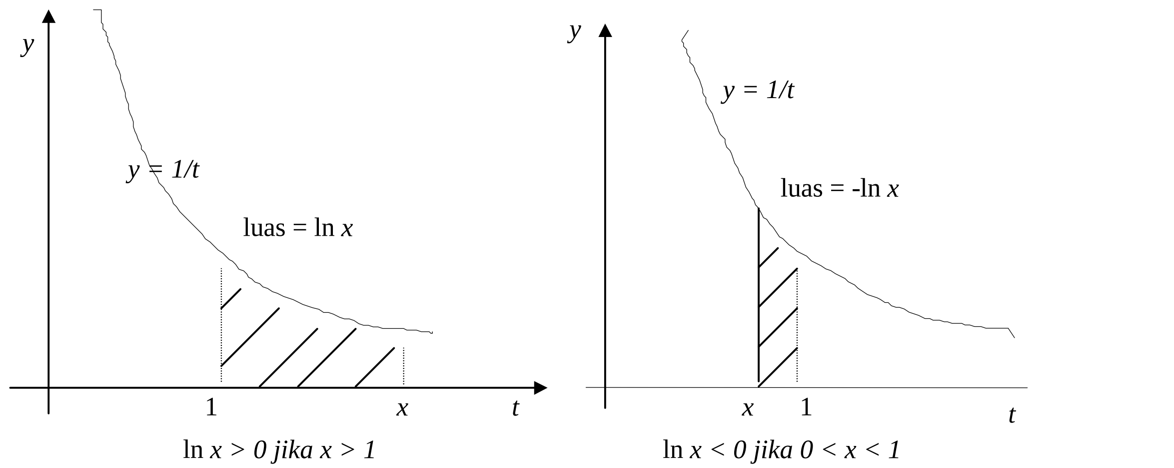
Takrif : Fungsi Logaritma Asli bagi $x \in (0, \infty)$ ditulis **ln *x*** dan ditakrifkan sebagai

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

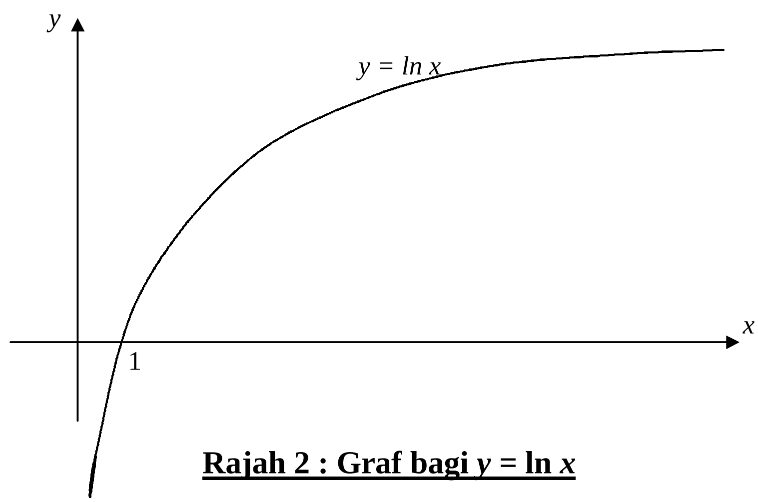
Kita namakan fungsi $f(x) = \ln x$ **fungsi logaritma asli**.

Graf bagi fungsi ln *x*

Daripada sifat fungsi $\ln x$, kita dapati terbitan bagi $\ln x$ adalah positif bagi $x \in (0, \infty)$, oleh itu $\ln x$ menokok di atas selang $(0, \infty)$. Kita ketahui juga bahawa $\ln 1 = 0$; maka $\ln x > 0$ jika $x > 1$ dan $\ln x < 0$ jika $0 < x < 1$. Kita boleh juga mentafsirkan fungsi $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ sebagai luas bagi rantau dibawah lengkung $y = \frac{1}{t}$ didalam selang $t = 1$ dan $t = x$.



<u>Rajah 1 : Luas rantau ln *x*</u>



<u>Rajah 2 : Graf bagi *y* = ln *x*</u>

Satu lagi sifat bagi fungsi ln x diberi seperti berikut ;

Bagi sebarang nombor nisbah n dan bagi sebarang nilai $x \in (0, \infty)$,

$$\ln x^n \quad = \quad n \ln x$$

Untuk membukti sifat di atas , kita mulakan dengan penggunaan takrif asas fungsi ln x, di mana

$$\ln x^n = \int_1^{x^n} \frac{1}{t}\, dt$$

Dengan kaedah gantian $t = u^n \quad \Rightarrow \quad dt = nu^{n-1} du$;

Bila $u = 1$, $t = 1$ dan bila $u = x$, $t = x^n$, maka

$$\ln x^n = \int_1^{x} \frac{1}{u^n}\, nu^{n-1} du \quad = \quad n\int_1^{x} \frac{1}{u}\, du \quad = \quad n \ln x$$

<u>Terbitan bagi ln *x*</u>

$$D_x(\ln x) \quad = \quad \frac{1}{x} \quad \text{atau} \quad d(\ln u) \quad = \quad \frac{1}{u}\, du\,.$$

Secara amnya, kita boleh tulis

$$D_x \ln|x| = \frac{1}{x}$$

Kita ingat kembali bahawa

$$|x| \quad = \quad \begin{Bmatrix} x & bila & x > 0 \\ -x & bila & x < 0 \end{Bmatrix}$$

Bila $x > 0$, kita perolehi $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

Bila $x < 0$, $D_x(\ln|x|) \quad = \quad D_x(\ln(-x)) \quad = \left(-\dfrac{1}{x}\right)(-1) \quad = \quad \dfrac{1}{x}$

Dengan kaedah yang sama $D_x \ln|f(x)| = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Contoh :

Cari $D_x \ln|x^2 - 1|$

Penyelesaian :

$$D_x \ln|x^2 - 1| \quad = \quad \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Contoh :

Cari $f'(x)$ jika $f(x) = x^2 \ln|1 - x|$

Penyelesaian :

Gunakan petua hasildarab,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\,(\ln|1-x|) \quad + \quad x^2\left(\frac{-1}{1-x}\right) \\ &= 2x \ln|1-x| \quad - \quad \frac{x^2}{1-x} \end{aligned}$$

Contoh :

Jika $y = \ln|\sec x + \tan x|$, dari y'

Penyelesaian :

Andaikan $f(x) = \sec x + \tan x$

$$f'(x) \;=\; sek\,x \tan x \;+\; sek^2\,x \;.\;$$ Jika $y = \ln\; f(x)$, maka

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \therefore\;\; y' \;=\; \frac{sek\,x\,(\tan x \;+\; sek\,x}{sek\,x \;+\; \tan x} \;=\; sek\,x$$

Contoh :

Gunakan sifat logaritma untuk mencari y' jika $y \;=\; \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$

Penyelesaian :

Tulis

$$\ln y \;=\; \ln\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} \;=\; \ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| \;-\; \frac{1}{2}\ln|x-1|$$

$$\therefore \frac{1}{y}y' \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} \;-\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}$$

$$\therefore\;\; y' \;=\; \frac{y}{2(x+1)} \;-\; \frac{y}{2(x-1)}$$

$$y' \;=\; \frac{-y}{x^2-1}$$

Antiterbitan bagi 1/u

Daripada rumus $d(\ln|u|) \;=\; \frac{1}{u}\,du$

Kita perolehi

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c \quad\Rightarrow\quad \int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \ln(f(u)) + c$$

Contoh :

Cari $\int \frac{1}{x+3} dx$

Penyelesaian :

Gantikan $u = x + 3$, $du = dx$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{x+3}\, dx \quad = \quad \int \frac{1}{u}\, du \; = \quad \ln|u| \quad + \quad c \quad = \quad \ln|x+3| + c$$

Contoh :

Cari $\int \tan x \; dx$

Penyelesaian :

$$\tan x \; dx = \frac{\sin x}{\cos x} \; dx$$

$$\therefore \int \tan x \; dx = \int \frac{\sin x}{kos x} \; dx$$

$$Gantikan \; u = kos x \qquad \therefore \; du = -\sin x dx$$

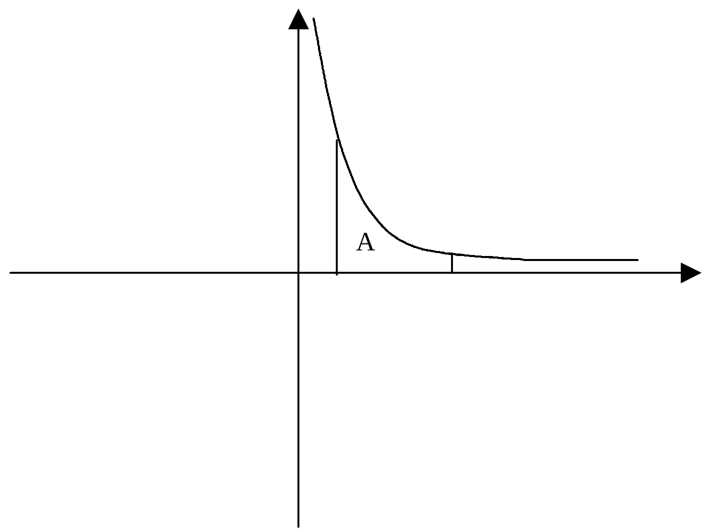
$$\therefore \quad \int \tan x \; dx = -\int \frac{1}{u} \; du \; = -\ln|u| \; + \; c \quad = -\ln|kos x| \; + \; c$$

Jawapan ini boleh juga ditulis sseperti berikut :-

$$-\ln|kos \; x| + c \quad = \quad \ln\left|\frac{1}{kos \; x}\right| + c \quad = \quad \ln|sek \; x| \quad + \quad c$$

Contoh : Cari luas rantau di bawah lengkung $y = \frac{1}{x}$ di dalam selang $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Penyelesaian :



Luas A $= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \ln\frac{3}{2} - \ln\frac{1}{2} = \ln 3$

Contoh : Cari $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$

Penyelesaian :

Andaikan $u = \ln x$, maka $du = \frac{1}{x} dx$

Oleh yang demikian, $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln u + C = \ln(\ln x) + C$